Enoncé 3.1 : le maximum de surplus

Soit un marché en concurrence pure et parfaite dont l'offre et la demande sont représentées par les fonctions $S(p) = 2\sqrt{p}$ et $D(p) = 4 - 2p$

1. Calculer la production des firmes et leur surplus net quand le prix du marché est p (on le note $F(p)$).
2. Calculer la demande des ménages et leur surplus net quand le prix du marché est p (on le note $M(p)$).
3. Calculer la variable p telle que la fonction $F(p) + M(p)$ soit maximum. Que dire du résultat trouvé ?

Préambule: production effective au prix p

Sous l'hypothèse de concurrence pure et parfaite, on doit admettre que les firmes ne produisent pas plus que ce qui est consommé. En effet, toute l'information est connue par tous les acteurs de marché. Ainsi, au prix p, la quantité produite, q vérifie

$$q^E = \min\left(2\sqrt{p}, 4 - 2p\right)$$

Ainsi, on trouve la fonction

$$q^E = \begin{cases} 2\sqrt{p} & \text{if} \quad p \in [0,1] \\ 4 - 2p & \text{if} \quad p \geq 1 \end{cases}$$

le détail du calcul se trouve dans le transparent suivant.

Sous quelle condition $4 - 2p \leq 2\sqrt{p}$? Si l'on fait le changement de variable $X = \sqrt{p}$, cela revient à poser la question, sous quelle condition $X^2 + X - 2 \leq 0$. Dans ce genre de problème, on commence par rechercher les valeurs pour lesquelles l'inégalité est nulle

$$X^2 + X - 2 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 1 - 4 * (-2) = 9$, les deux racines: $\dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $\dfrac{-1-3}{2} = -2$. La fonction $X \mapsto X^2 + X - 2$ est une parabole convexe, nulle en -2 et en 1, négative entre ces deux valeurs, positive ailleurs. On en déduit donc que

$$\begin{array}{ll} \text{lorsque } p \leq 1 & 2\sqrt{p} \leq 4 - 2p \\ \text{lorsque } p \geq 1 & 4 - 2p \leq 2\sqrt{p} \end{array}$$

d'où la définition donnée de q^E dans le transparent précédent.

Question 1 & 2: surplus des firmes et des consommateurs en dehors de l'équilibre

Il est indispensable de réfléchir à quoi correspondent les quantités qui s'échangent aux différents prix. En effet, hormis $p = 1$, l'offre et la demande sont différentes. Soit les consommateurs sont rationnés ($p \leq 1$), soit les firmes doivent produire moins qu'il ne serait avantageux pour elles, sous le risque de ne pas trouver de débouchés. En dehors de l'équilibre, on doit distinguer deux cas pour le calcul des surplus:

- Lorsque l'un des côtés du marché agit en restant sur sa courbe d'offre ou de demande, le calcul du surplus correspond exactement à ce qui a été développé dans le cours.
- Lorsque l'un des côtés du marché est rationné, le calcul du surplus peut s'opérer de plusieurs manières. En effet, quels seront les firmes ou les consommateurs qui seront sur le marché, les plus efficaces ou un mélange chaotique ? Tout est possible. Le surplus maximum possible dans cette économie est obtenu lorsque ce sont "les plus efficaces" qui produisent ou qui consomment.

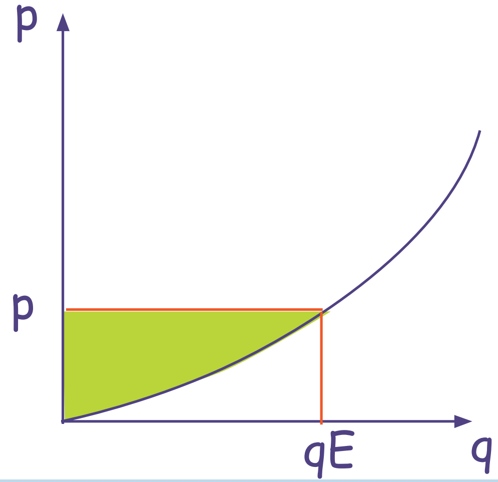
Question 1a: surplus de la firme quand $p \leq 1$

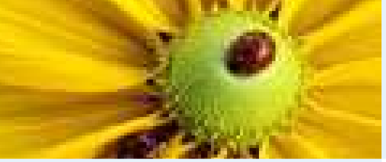
Quand $p = 1$, l'inégalité $2\sqrt{p} \leq 4 - 2p$ est vérifiée: les firmes produisent exactement ce qu'elles voudraient produire en concurrence pure et parfaite. Le calcul du surplus des firmes est standard.

Surplus net des firmes Le profit des firmes dépend de leur coût marginal. Ce dernier s'obtient en inversant l'offre:

$q = 2\sqrt{p} \iff p = \dfrac{q^2}{4}$. On trouve alors, avec $q^E = 2\sqrt{p}$:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{q^E} [p - \frac{q^2}{4}]\, dq \\ &= pq^E - \frac{(q^E)^3}{12} \\ &= \frac{4}{3}\, p\, \sqrt{p} \end{aligned}$$

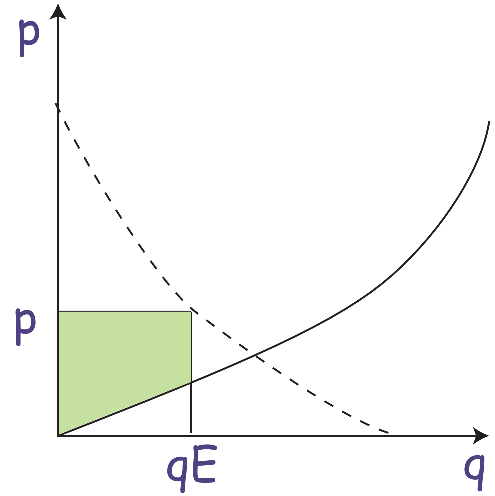




Quand $p \geq 1$, l'inégalité $2\sqrt{p} \geq 4 - 2p$ est vérifiée: les firmes ne peuvent pas produire ce qu'elles voudraient produire en concurrence pure et parfaite, sinon, elles ne vendent pas toute leur production. Le calcul du surplus des firmes suppose que ce sont les firmes les plus efficaces qui produisent (cf. la figure)

Surplus net des firmes Le profit des firmes dépend dans ce cas de leur coût marginal, celui qui a été calculé dans la question précédente. On trouve alors, avec $q^E = 4 - 2p$:

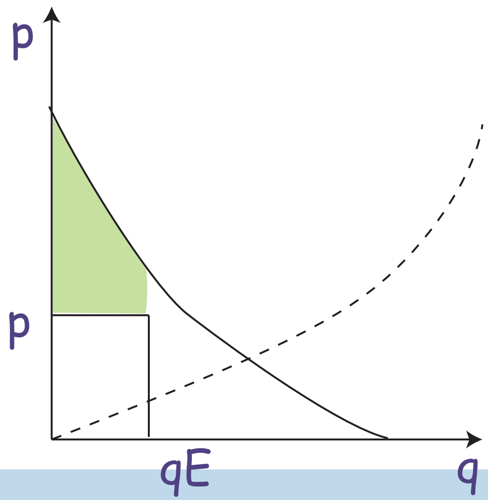
$$\begin{aligned} F(p) &\leq \int_0^{q^E} [p - \frac{q^2}{4}]\, dq \\ &= pq^E - \frac{(q^E)^3}{12} \\ &= \frac{2}{3}\,(2-p)\,(-p^2 + 7p - 4) \end{aligned}$$



Quand $p = 1$, l'inégalité $2\sqrt{p} \leq 4 - 2p$ est vérifiée: les consommateurs trouveront moins sur le marché que la quantité qu'ils souhaitent. Le calcul du surplus des firmes est fait en supposant que ce sont les consommateurs dont la disposition à payer est la plus élevée qui consomment.

Surplus net des consommateurs Le surplus des consommateurs dépend de leur disposition à payer, obtenue en inversant la demande: $q = 4 - 2p \iff p = \dfrac{4-q}{2}$. On trouve, avec $q^E = 2\sqrt{p}$:

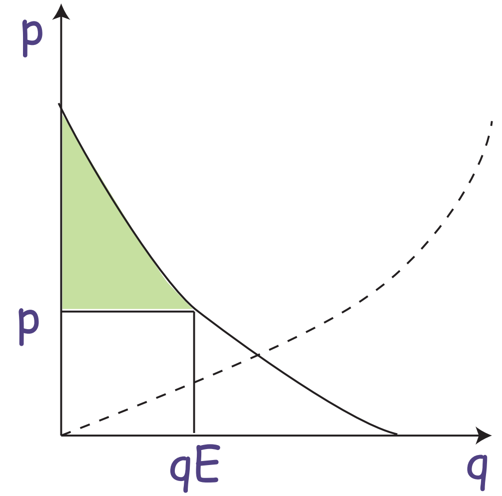
$$
\begin{aligned}
M(p) &\leq \int_0^{q^E} [\frac{4-q}{2} - p]\, dq \\
&= 2q^E - \frac{(q^E)^2}{4} - p\, q^E \\
&= 2\sqrt{p}\left(2 - p - \frac{\sqrt{p}}{2}\right)
\end{aligned}
$$



Quand $p \geq 1$, l'inégalité $2\sqrt{p} \geq 4 - 2p$ est vérifiée: les consommateurs trouveront sur le marché toute la quantité de bien voulue. Le calcul du surplus est standard. (A noter que $p \leq 2$.)

Surplus net des consommateurs Le surplus des consommateurs dépend de leur disposition à payer, obtenue en inversant la demande: $q = 4 - 2p \iff p = \dfrac{4-q}{2}$. On trouve, avec $q^E = 4 - 2p$:

$$\begin{aligned} M(p) &\leq \int_0^{q^E} [\frac{4-q}{2} - p]\, dq \\ &= 2q^E - \frac{(q^E)^2}{4} - p\, q^E \\ &= 4\sqrt{p} - p - 2p\sqrt{p} \end{aligned}$$



Question 3: maximum de la fonction $\Sigma(p) = F(p) + M(p)$

Deux cas suivant la position de p par rapport à 1.

Maximum de $\Sigma(p)$ quand $p \in [0, 1]$ Dans cet intervalle de prix on remarque que $\Sigma(p) = \frac{4}{3}p\sqrt{p} + 2\sqrt{p}\left(2 - p - \frac{\sqrt{p}}{2}\right) = -\frac{2}{3}p\sqrt{p} - p + 4\sqrt{p}$ dont la dérivée est $-\sqrt{p} - 1 + \frac{2}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(2 - \sqrt{p} - p\right)$, soit $(1 - \sqrt{p})(2 + \sqrt{p}) \geq 0$; $\Sigma(p)$ croissante est maximum en 1.

Maximum de $\Sigma(p)$ quand $p \geq 1$ Dans cet intervalle de prix $\Sigma(p) = -\frac{16}{3} + 11p - 6p^2 - \frac{2}{3}p^3 + 4\sqrt{p} - 2p\sqrt{p}$ dont la dérivée est $(11 - 12p - 2p^2) + (\frac{2}{\sqrt{p}} - 3\sqrt{p})$. Or la première parenthèse est décroissante et vaut -1 en $p = 1$: elle est donc toujours négative. Il en est de même de la seconde. La fonction $\Sigma(p)$ est donc maximum en 1.

- Trouver que le maximum est en $p = 1$ n'est pas une surprise, car on sait que le surplus est maximum à l'équilibre. La démonstration graphique est beaucoup plus immédiate que le calcul de l'exercice.
- Une réponse naïve à l'exercice aurait été de négliger d'analyser les quantités qui s'échangent réellement et d'écrire

$$SOMME = \frac{4}{3}\, p\, \sqrt{p} + (4\sqrt{p} - p - 2p\,\sqrt{p})$$

car en effet, cette fonction n'a pas de sens, sinon qu'elle additionne des chiffres dont la somme ne représente rien. Pour information, la fonction précédente est MINIMALE (et non maximale) en $p = 1$.